CONJECTURE DE SYRACUSE
UTILISATION DE L'ALGÈBRE DE BOOLE

Yves Huerta

Note novembre 2016 :

Expertisé par M. Anatole Khelif, il résulte que j'ai confondu au point 14 lors du passage à la déduction, la conjonction au sens du langage avec la conjonction au sens du métalangage.

Énoncé du problème[1] :

Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$, avec $n \in \mathbb{N}$ et $(U_0) \in \mathbb{N}$, telle que:

$(U_{n+1}) = (U_n)/2$ si (U_n) est pair.
$(U_{n+1}) = 3(U_n) + 1$ si (U_n) est impair.

Pour $(U_0) = 0$, quelque soit n : $(U_n) = 0$.
La Conjecture de Syracuse affirme que quelque soit l'entier naturel non nul N choisi pour (U_0), il existe alors un rang j tel que $(U_j) = 1$.
On dira qu'un entier naturel vérifie la Conjecture de Syracuse s'il vérifie la suite (U_n) définie précédemment.

Introduction :

Ce problème difficile a été étudié par plusieurs mathématiciens, sans aboutir à une démonstration. Le document[1] de M. Lagarias reprend parfaitement les premières avancées remarquables ainsi que l'historique du problème. Mon idée consiste à utiliser la représentation des entiers naturels sous forme binaire dans le but de travailler via une algèbre de Boole[2] rendant possible l'opérateur de conjonction[3], de disjonction[4] entre deux nombres binaires. L'opérateur négation[5] peut également être utilisé. En effet, la représention binaire d'un nombre entier permet d'identifier très simplement la parité. Un nombre entier naturel représenté sous forme binaire autre que $\{0\}$ et $\{1\}$ commence toujours par un 1 vers la gauche et finit soit par un 0 situé complètement à droite dans le cas pair, soit par un 1 dans le cas impair. En travaillant sur l'algèbre de Boole utilisant les opérateurs de conjonction, de disjonction et négation dans l'ensemble des variables $\{0,1\}$, on arrive à créer les opérateurs arithmétiques classiques comme la somme et la multiplication sur l'ensemble des entiers naturels (l'électronique numérique dispose de différents composants dédiés pour l'arithmétique des entiers naturels sous forme binaires construits à base de conjonction, disjonction et négation)[6]. La division par deux est extrêmement simplifiée, un registre à décalage[7] suffit (lui même créé à base de conjonction, de disjonction et négation). En effet, pour diviser par deux un nombre pair en binaire, il suffit de supprimer le zéro qui est situé complètement à droite. Ces composants sont les éléments de base du fonctionnement de nos smartphones, calculatrices numériques ou ordinateurs.

Méthode :

On note N l'entier naturel différent de $\{0\}$ et $\{1\}$ écrit sous sa forme binaire naturel, composé de k bits, k appartenant à $\mathbb{N}-\{0{,}1\}$.
N dispose toujours d'un 1 complètement à gauche de sa représentation en binaire naturel et se termine complètement à droite soit par 0 dans le cas pair soit par 1 dans le cas impair.
On partitionne l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}-\{0{,}1\}$ en blocs composés d'entiers naturels représentés sous forme binaire naturel à k bits. Ces blocs sont notés [BLOC(k)] [8].
L'entier N sous forme binaire naturel à k bits représente donc un élément de [BLOC(k)].
Lorsque k parcourt $\mathbb{N}-\{0{,}1\}$, les [BLOC(k)] mis bout à bout représentent l'ensemble des entiers naturels dans $\mathbb{N}-\{0{,}1\}$.
Je vais démontrer la Conjecture de Syracuse à l'aide d'un raisonnement par récurrence.
La récurrence est portée sur le nombre de bit noté k de l'entier naturel N différent de $\{0\}$ et différent de $\{1\}$ représenté sous forme binaire naturel et vérifiant la suite (U_n).

Pour visualiser les séquences de la Conjecture de Syracuse en binaire :
`https://www.huerta-network.com/syracuse.php`
Texmaker

Définitions et notations :

1. N représente un élément entier naturel différent de $\{0\}$ et $\{1\}$ écrit sous la forme binaire naturel, composé de k bits et présent dans le bloc [BLOC(k)].

2. Le [BLOC(k)] contient 2 puissance $k-1$ éléments non nuls sous forme binaire à k bits.

3. Voici une représentation du [BLOC(k)] avec k fixé sur $\mathbb{N}-\{0{,}1\}$:

10...0000 avec k bits
10...0001
10...0010
10...0011
10...0100
10...0101
10...0110
10...0111
...
11...1110
11...1111

(h) : Voici l'hypothèse de récurrence qui porte sur k : Tout entier naturel N appartenant à l'ensemble $\mathbb{N}-\{0{,}1\}$ avec k bits fixé sur $\mathbb{N}-\{0{,}1\}$, présent dans le [BLOC(k)], vérifie la Conjecture de Syracuse.

(h) : P(k) $\Leftrightarrow$ [Pour tout N élément de $\mathbb{N}-\{0{,}1\}$ à k bits fixé sur $\mathbb{N}-\{0{,}1\}$, N est un élément du [BLOC(k)] et vérifie la Conjecture de Syracuse].

(h) : P(k) $\Leftrightarrow$ [[BLOC(k)] = [BLOC(k)$pair$]$\cup$[BLOC(k)$impair$] avec k bits fixé sur $\mathbb{N}-\{0{,}1\}$, vérifie la Conjecture de Syracuse].

Début du raisonnement par récurrence :

4. La propriété P(k) est vérifiée pour $k = 2, 3, 4$ (voir en fin de papier).

5. On suppose la propriété P(k) *vraie* pour k fixé sur $\mathbb{N}-\{0{,}1\}$.

6. On démontre l'hérédité : P(k) $\Rightarrow$ P(k+1).

7. Soit k fixé sur $\mathbb{N}-\{0{,}1\}$ et soit N un élément pair du [BLOC(k)].

N s'écrit sous la forme : $N = 1xx...xxx0$ avec k bits, vérifie la Conjecture de Syracuse.

N+1 s'écrit sous la forme : $N+1 = 1xx...xxx1$ avec k bits, vérifie la Conjecture de Syracuse.

Les x pouvant être soit 0 soit 1.

8. La conjonction dans l'algèbre de Boole est notée : $\wedge$

On donne la table de vérité de la conjonction dans l'algèbre de Boole :

$$0\wedge0 = 0$$
$$0\wedge1 = 0$$
$$1\wedge0 = 0$$
$$1\wedge1 = 1$$

9. Table de vérité de la conjonction appliquée sur les entiers naturels non nuls représentés sous forme binaire naturel traitant le problème :

Ne Vérifie Pas la Conjecture = (NVPC)
Vérifie la Conjecture = (VC)

(NVPC)$\wedge$(NVPC) = (NVPC)
(NVPC)$\wedge$(VC) = (NVPC)
(VC)$\wedge$(NVPC) = (NVPC)
(VC)$\wedge$(VC) = (VC)

10. On réalise une conjonction binaire avec les éléments N et N+1 : [$N \wedge (N+1)$]=N

En effet, on pose l'opération et on calcule la conjonction binaire bit à bit :

$$\begin{array}{ll} & N \\ \wedge & N+1 \\ \hline & N \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ll} & 1xx...xxx0 \text{ avec } k \text{ bits.} \\ \wedge & 1xx...xxx1 \text{ avec } k \text{ bits.} \\ \hline & 1xx...xxx0 \text{ avec } k \text{ bits.} \end{array}$$

$(1xx...xxx0) \wedge (1xx...xxx1) = (1xx...xxx0)$ avec k bits,
vérifie la Conjecture de Syracuse.

11. On comprend alors que lorsque N parcourt le [BLOC(k)$pair$] et N+1 parcourant le [BLOC(k)$impair$] on a :

[BLOC(k)$pair$]$\wedge$[BLOC(k)$impair$] = [BLOC(k)$pair$] avec k bits,
vérifie la Conjecture de Syracuse.

12. On représente [BLOC(k+1)] = [BLOC(k+1)$pair$]$\cup$[BLOC(k+1)$impair$]

Comme [BLOC(k+1)$pair$] est pair, $(U_n)/2$ appliqué une fois au [BLOC(k+1)$pair$] donne exactement le [BLOC(k)] qui représente l'hypothèse de récurrence vérifiant la Conjecture de Syracuse. Par conséquent, on a bien montré que le [BLOC(k+1)$pair$] avec k+1 bits vérifie la Conjecture de Syracuse.

13. Soit M un élément pair du [BLOC(k+1)].

M s'écrit sous la forme : $M = 1xxx...xxx0$ avec k+1 bits,
vérifie la Conjecture de Syracuse.

M+1 s'écrit sous la forme : $M+1 = 1xxx...xxx1$ avec k+1 bits,
on ne sait pas s'il vérifie la Conjecture de Syracuse.

Les x pouvant être soit 0 soit 1.

14. On réalise une conjonction binaire avec les éléments M et M+1 : [$M \wedge (M+1)$]=M

En effet, on pose l'opération et on calcule la conjonction binaire bit à bit :

$$\begin{array}{ll} & M \\ \wedge & M+1 \\ \hline & M \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ll} & 1xxx...xxx0 \text{ avec } k+1 \text{ bits.} \\ \wedge & 1xxx...xxx1 \text{ avec } k+1 \text{ bits.} \\ \hline & 1xxx...xxx0 \text{ avec } k+1 \text{ bits.} \end{array}$$

$(1xxx...xxx0) \wedge (1xxx...xxx1) = (1xxx...xxx0)$ avec k+1 bits,
vérifie la Conjecture de Syracuse.

D'après la table de vérité, on est apparemment dans le cas de figure (VC)$\wedge$(VC) = (VC)
En effet, la conjonction vérifie la Conjecture de Syracuse si et seulement si les deux éléments vérifient la Conjecture de Syracuse simultanément.
On en déduit que $M+1 = 1xxx...xxx1$ avec k+1 bits vérifie la Conjecture de Syracuse.

15. On comprend alors que lorsque M parcourt le [BLOC(k+1)*pair*] et M+1 parcourant le [BLOC(k+1)*impair*] on a :

[BLOC(k+1)*pair*]$\wedge$[BLOC(k+1)*impair*] = [BLOC(k+1)*pair*] avec k+1 bits,
vérifie la Conjecture de Syracuse.

16. Tout élément du [BLOC(k+1)*impair*] vérifie donc la Conjecture de Syracuse.

17. On a donc tout élément du [BLOC(k+1)] = [BLOC(k+1)*pair*]$\cup$[BLOC(k+1)*impair*] avec k+1 bits qui vérifie la Conjecture de Syracuse.

18. Finalement d'après l'hypothèse de récurrence :

[BLOC(k)] = [BLOC(k)*pair*]$\cup$[BLOC(k)*impair*] supposée *vraie*.

On obtient :

[BLOC(k+1)] = [BLOC(k+1)*pair*]$\cup$[BLOC(k+1)*impair*] *vrai*.

On a bien montré que : P(k) $\Rightarrow$ P(k+1).

Conclusion : La propriété est vraie pour P(2), P(3), P(4) et est héréditaire, elle est donc vraie pour tout k appartenant à $\mathbb{N}-\{0{,}1\}$.

Fin de la récurrence.

Pour tout k appartenant à $\mathbb{N}-\{0{,}1\}$, le [BLOC(k)] vérifie la Conjecture de Syracuse, lorsque k parcourt $\mathbb{N}-\{0{,}1\}$, les [BLOC(k)] mis bout à bout représentent les entiers naturels vérifiant la Conjecture de Syracuse sur $\mathbb{N}-\{0{,}1\}$.
La Conjecture de Syracuse est donc vérifiée sur $\mathbb{N}-\{0{,}1\}$.
D'autre part, puisque la Conjecture de Syracuse est vérifiée pour $N = 0$ et que pour $N = 1$ la suite (U_n) donne 4 - 2 - 1, on a montré que la Conjecture de Syracuse est vérifiée sur $\mathbb{N}$.

La Conjecture de Syracuse est ainsi démontrée. $\square$

19. **Théorème :**

Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$, avec $n \in \mathbb{N}$ et $(U_0) \in \mathbb{N}$, telle que:

$(U_{n+1}) = (U_n)/2$ si (U_n) est pair.
$(U_{n+1}) = 3(U_n) + 1$ si (U_n) est impair.

Pour $(U_0) = 0$, quelque soit n : $(U_n) = 0$.
Quelque soit l'entier naturel non nul N choisi pour (U_0), il existe un rang j tel que $(U_j) = 1$.

20. Vérification des BLOC(2), BLOC(3), BLOC(4) :

BLOC(2): 2-1

BLOC(2): 3-10-5-16-8-4-2-1

BLOC(3): 4-2-1

BLOC(3): 5-16-8-4-2-1

BLOC(3): 6-3-10-5-16-8-4-2-1

BLOC(3): 7-22-11-34-17-52-26-13-40-20-10-5-16-8-4-2-1

BLOC(4): 8-4-2-1

BLOC(4): 9-28-14-7-22-11-34-17-52-26-13-40-20-10-5-16-8-4-2-1

BLOC(4): 10-5-16-8-4-2-1

BLOC(4): 11-34-17-52-26-13-40-20-10-5-16-8-4-2-1

BLOC(4): 12-6-3-10-5-16-8-4-2-1

BLOC(4): 13-40-20-10-5-16-8-4-2-1

BLOC(4): 14-7-22-11-34-17-52-26-13-40-20-10-5-16-8-4-2-1

BLOC(4): 15-46-23-70-35-106-53-160-80-40-20-10-5-16-8-4-2-1

21. Conclusion :

P(2), P(3), P(4), vérifient la *Conjecture de Syracuse*.

Remerciements :

Je souhaite remercier tous ceux qui ont contribué de proche comme de loin à la rédaction de ce papier. Mes pensées vont d'abord et tout particulièrement à M. Lagarias qui a eu l'extrême gentillesse de lire ma première version de Nov 2015, avec critiques papier, et qui m'a ainsi encouragé à rechercher une méthode pour démontrer le théorème TORO et la rédaction sous LaTeX. Je tiens à exprimer ma reconnaissance envers M. Khelif que je remercie infiniment car il m'a consacré une disponibilité. Je remercie M. Verdier pour son soutien et ses conseils. Je souhaite également remercier Thomas Huerta pour son implication dans la partie informatique, visualisation des séquences de la *Conjecture de Syracuse* en binaires et autres programmes informatiques sur ordinateur qui m'ont été d'une aide précieuse notamment pour calculer et visualiser les séquences en binaire des 1x+1 et 5x+1 problèmes. Enfin, je souhaite remercier les contradicteurs du formidable site : `http://www.les-mathematiques.net`

Texmaker

Références :

[1] The 3x+1Problem: An Overview Jeffrey C. Lagarias.
`https://www.huerta-network.com/pdf/mathematics/syracuse/mbk-78-prev.pdf`
Texmaker

[2] L'ALGÈBRE DE BOOLE par Gaston Casanova édition : Presses Universitaires de France. Numéro 1246 Dépôt légal. 1ère édition : 1er trimestre 1967.

[2] https://es.wikipedia.org/wiki/Algèbra-de-Boole
`https://es.wikipedia.org/wiki/%C3%81lgebra_de_Boole`
Texmaker

[3] http://www.ti.com/lit/ds/symlink/sn74ls08.pdf
`http://www.ti.com/lit/ds/symlink/sn74ls08.pdf`
Texmaker

[4] http://www.elexp.com/PDFs/1074LS32.pdf
`http://www.elexp.com/PDFs/1074LS32.pdf`
Texmaker

[5] http://www.ti.com/lit/ds/symlink/sn74ls04.pdf
`http://www.ti.com/lit/ds/symlink/sn74ls04.pdf`
Texmaker

[6] Carmen Baena/Manuel Jesús Bellido/Alberto Jesús Molina/María del Pilar/Manuel Valencia : Problemas de circuitos y sistemas digitales. Pages : 141-167. ISBN : 84-481-0966-X Depósito Legal : M.5.046-1997

[6] `http://susta.cz/fel/74/pdf/sn_74181.pdf`
Texmaker

[7] http://www.ti.com/lit/ds/symlink/sn74ls595.pdf
`http://www.nxp.com/documents/data_sheet/74HC_HCT595.pdf`
Texmaker

[8] Anthonio Hermosa Donate : Electronica Digital Fundamental. Page : 8. ISBN : 84-267-1133-2 Depósito Legal : B-34.708-1997 Made in Spain.

yves@huerta-network.com
Mars 2016